Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías
Universidad de Guadalajara

Ejercicios resueltos
Maestría en Ciencias en Matemáticas

---

1 Ejecicios de cálculo

1. **Sean $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ tales que $0 < a_1 < b_1$. Definimos**

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \tfrac{a_n + b_n}{2}.$$

Demostrar que cada una de las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son convergentes y que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Demostración

Para probar que las sucesiones son convergentes procederemos demostrando que ambas sucesiones son monótonas y acotadas de lo que se sigue que son convergentes.

Acotadas por inducción.

Caso $n = 1$. Puesto que $0 < a_1 < b_1$ se sigue que

- $a_1^2 < a_1 b_1 < b_1^2$, así $a_1 < \sqrt{a_1 b_1} < b_1$. Es decir $a_1 < a_2 < b_1$.
- $2a_1 < a_1 + b_1 < 2b_1$, así $a_1 < \frac{a_1+b_1}{2} < b_1$. Es decir $a_1 < b_2 < b_1$.

Ahora supongamos que para $n \in \mathbb{N}$ se cumple $a_1 < a_n < b_1$ y $a_1 < b_n < b_1$. Entonces

- $a_1^2 < a_n b_n < b_1^2$, así $a_1 < a_{n+1} < b_1$.
- $2a_1 < a_n + b_n < 2b_1$, así $a_1 < b_{n+1} < b_1$.

Por lo tanto las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son inferiormente acotadas por a_1 y superiormente acotadas por b_1.

Monotonía.

Observemos que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces como $0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, se obtiene que $2ab \leq a^2 + b^2$. Luego

$$4ab = 2ab + 2ab \leq a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2.$$

Se sigue que $ab \leq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$, o bien $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

Por lo tanto

$$a_n \leq b_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

De lo anterior se sigue que $a_n^2 \leq a_n b_n$, luego $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Lo que indica que $\{a_n\}$ es una sucesión creciente.

De nuevo de (1) obenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{b_n + b_n}{2} = b_n,$$

así $\{b_n\}$ es una sucesión decreciente.

Finalmente de las propiedades de linealidad del límite obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n}{2},$$

así

$$2 \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. ■

2. **Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Supongamos que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ cuando $0 < |x - a| < \delta$. Demuestra que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.**

Demostración.

Denotemos por

$$\ell_1 = \lim_{x\to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \ell_2 = \lim_{x\to a} g(x).$$

Sea $\varepsilon > 0$. De la definición de límite existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

- $|\ell_1 - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, cuando $0 < |x - a| < \delta_1$
- $|\ell_2 - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, cuando $0 < |x - a| < \delta_2$.

Definimos $\delta_3 = \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$. Entonces cuando $0 < |x - a| < \delta_3$ se cumple que

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - f(x) + f(x) - g(x) + g(x) - \ell_2| \\ &\leq |\ell_1 - f(x)| + |f(x) - g(x)| + |g(x) - \ell_2| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + 0 + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Puesto que ε es arbitrario se sigue que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1 = \ell_2 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$. ■

3. **Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funiones continuas tales que $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$. Demuestra que existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = g(x)$.**

   Demostración.

   Definamos $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ como $h = f - g$. Puesto que la suma de funciones continuas es continua se sigue que h es una función continua. Además

   $$h(a) = f(a) - g(a) < 0 \quad \text{y} \quad h(b) = f(b) - g(b) > 0.$$

   Así $0 \in (h(a), h(b))$. Por el Teorema de los valores intermedios existe $x \in (a, b)$ tal que $0 = h(x) = f(x) - g(x)$. Por lo tanto $f(x) = g(x)$. ■

4. **A partir de una lámina cuadrada de cartón de longitud L se pretende fabricar una caja de cartón sin tapa superior, cortando cuadrados idénticos en las esquinas y doblando los lados hacia arriba. Calcular el área de los cuadrados de las esquinas a recortar.**

   Solución

   Sea x la longitud del lado de cada uno de los cuadrados a recortar en las esquinas de la lámina. Así, como la lámina es de longitud L el lado del cuadrado que forma la caja que quiere fabricarse sería $L - 2x$. Se sigue entonces que el volumen de la caja es dado por

   $$V = x(L - 2x)^2 \,. \tag{2}$$

   Para determinar si este volumen es un máximo obtendremos sus puntos críticos dados por

   $$\frac{dV}{dx} = 12x^2 - 8Lx + L^2 = 0. \tag{3}$$

   Resolviendo (3) obtenemos las soluciones

   $$x = \frac{L}{2}, \frac{L}{6}. \tag{4}$$

   Mediante el método de la segunda derivada vemos que

   $$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=\frac{L}{2}} = 8(3x - L)|_{x=\frac{L}{2}} = 4L, \tag{5}$$

   $$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=\frac{L}{6}} = 8(3x - L)|_{x=\frac{L}{6}} = -4L \tag{6}$$

   Esto implica que $x = \frac{L}{6}$ es un punto de concavidad negativa y por tanto un máximo. De esta manera el área del cuadrado buscado es dada por

   $$A = x^2 = \frac{L^2}{36}. \tag{7}$$

5. **Se pretende construir una piscina circular a un lado de un jardín rectangular. Se pretende además rodear ambos mediante una cerca de alambre de 500 metros de longitud. Calcular las dimensiones del jardín y de la piscina de tal forma que la suma de sus áreas sea mínima.**

Solución

Sea x la longitud del alambre destinada a la Piscina. Se sigue entonces que $500-x$ es la longitud destinada al jardín. Usando la fórmula del perímetro para una circunferencia se sigue que el radio para la piscina es de $r = x/2\pi$, mientras que la fórmula para el perímetro de un cuadrado nos indica que cada lado del jardín debe medir $l = (500-x)/4$. De esta manera el área total de ambos es dada por

$$A = \pi r^2 + l^2 = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(500-x)^2}{16}. \tag{8}$$

Los puntos críticos para esta función se obtienen a partir de

$$\frac{dA}{dx} = \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8}\right) x - \frac{125}{2} = 0. \tag{9}$$

La solución para esta ecuación es

$$x = \frac{500\pi}{4+\pi}. \tag{10}$$

Cuando evaluamos $\frac{dA}{dx}$ para $x = \frac{500\pi}{4+\pi} - 0.5$ vemos que

$$\frac{dA}{dx} = -0.1420 < 0. \tag{11}$$

Mientras que para $x = \frac{500\pi}{4+\pi} + 0.5$ se obtiene

$$\frac{dA}{dx} = 0.1420 > 0. \tag{12}$$

Esto implica que como la pendiente pasa de ser negativa a positiva alrededor de $x = \frac{500\pi}{4+\pi}$, entonces ese punto corresponde a un mínimo. Así la piscina debe tener un radio de

$$r = \frac{250}{4+\pi} \simeq 35.0061m, \tag{13}$$

y el jardín debe medir de lado

$$l = \frac{500}{4+\pi} \simeq 70.0123m. \tag{14}$$

6. **Cuando se vacía harina de un costal ésta forma un cono cuyo volumen incrementa a razón de $0.5\, m^3/seg$. Si la altura del cono es siempre igual al radio de su base, determinar la rapidez con que cambia la altura del cono cuando**

el radio de la base es de 1 metro.

Solución
El volumen del cono de harina es dado por

$$V = \frac{4}{3}\pi r^2 h, \tag{15}$$

siendo r el radio de la base y h la altura del cono. Sin embargo, como en nuestro caso $r = h$ la expresión anterior para h se escribe

$$h^3 = \frac{3}{4\pi}V. \tag{16}$$

Derivando respecto al tiempo obtenemos que la rapidez con la que cambia la altura del cono es dada por

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{4\pi h^2}\frac{dV}{dt}. \tag{17}$$

Del enunciado del problema sabemos que $h = 1\,m$ y que $\frac{dV}{dt} = 0.5\,m^3/seg$. Así, sustituyendo en (17) el resultado final es

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{8\pi}\frac{m}{seg}. \tag{18}$$

7. **Calcular la cantidad de litros de pintura necesarios para pintar exteriormente un contenedor esférico de 5 metros de radio con una capa de pintura de $7 \times 10^{-3}\,m$ de espesor.**

Solución
El volumen del contenedor esférico es dado por

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \tag{19}$$

donde r es el radio de la esfera. Diferenciando llegamos a

$$dV = 4\pi r^2 dr. \tag{20}$$

Se sigue entonces la fórmula en incrementos

$$\Delta V = 4\pi r^2 \Delta r, \tag{21}$$

donde ΔV representa el incremento en el volumen y Δr el incremento en el radio de la esfera generado en nuestro caso por el grosor de la capa de pintura exterior. Así, del enunciado del problema $r = 5\,m$ y $\Delta r = 7 \times 10^{-3}\,m$. Sustituyendo en (21) vemos que $\Delta V = 2.1991\,m^3$. Finalmente para convertir esta cantidad a litros usamos una regla de tres y el hecho de que $1\,lt = 0.001\,m^3$. Por lo tanto $\Delta V = 2199.12\,lts$.

8. **Un proyectil describe una trayectoria parabólica dada por**

$$y = bx - ax^2, \tag{22}$$

donde $a > 0$**,** $b > 0$**,** $a > b$ **y** $b > 1$**. Si a una distancia** d **medida sobre el suelo se coloca una barda, determinar la altura mínima que debe tener la barda para que el proyectil impacte y el ángulo (en radianes) medido respecto a la vertical de arriba hacia abajo con el que se impacta el proyectil.**

Solución
Dada la ecuación de la parábola, la altura mínima que debe tener la barda es la altura a la que pasa el proyectil en el punto $x = d$, así, evaluando y en $x = d$ vemos que la altura h de la barda debe satisfacer

$$h \geq bd - ad^2. \tag{23}$$

Por otro lado, la tangente del ángulo con respecto a la horizontal θ con el que se impacta el proyectil es dado por la pendiente de la parábola en el punto de impacto, dado por la fórmula

$$m = \tan\theta = \frac{dy}{dx} = b - 2ax. \tag{24}$$

Así, en el punto de impacto $x = d$ ese ángulo es

$$\theta = \tan^{-1}(b - 2ad). \tag{25}$$

Finalmente, el ángulo medido desde la vertical de arriba hacia abajo (medido en radianes) es dado entonces por

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(b - 2ad). \tag{26}$$

2 Ejercicios de álgebra lineal

1. **Determina todas las soluciones del sistema de ecuaciones**

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 1x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Solución
Para resolver el sistema aplicamos Eliminación Gaussiana sobre la matriz aumentada

del sistema.

$$\begin{bmatrix} [cccc|c]2 & -3 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} [c] \sim \\ \xrightarrow{r_2-(1/2)r_1} \\ \xrightarrow{r_3-(3/2)r_1} \\ \xrightarrow{r_4-2r_1} \end{array} \begin{bmatrix} [cccc|c]2 & -3 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 13/2 & -1 & -13/2 & -9/2 \\ 0 & 5/2 & -4 & -7/2 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} [c] \sim \\ \sim \\ \xrightarrow{r_3-13r_2} \\ \xrightarrow{r_4-5r_2} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} [cccc|c]2 & -3 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} [c] \sim \\ \sim \\ \sim \\ \xrightarrow{r_4-4r_3} \end{array} \begin{bmatrix} [cccc|c]2 & -3 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Finalmente note que la matriz aumentada tiene rango completo. La única solución puede ser obtenida realizando sustitución hacia atrás.

$$\begin{aligned} x_4 &= 7, \\ x_3 &= \frac{2-0(7)}{-1} = -2, \\ x_2 &= \frac{-1/2+(1/2)(7)-0(-2)}{1/2} = 6, \\ x_1 &= \frac{3-5(7)-2(-2)+3(6)}{2} = -5. \end{aligned}$$

2. **Determina todas las soluciones del sistema de ecuaciones**

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-5x_3 &= 2, \\ 2x_1-3x_2+4x_3 &= 4, \\ 4x_1+x_2-6x_3 &= 8. \end{aligned}$$

Solución

Para resolver el sistema aplicamos Eliminación Gaussiana sobre la matriz aumentada del sistema.

$$\begin{bmatrix} [ccc|c]1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -6 & 8 \end{bmatrix} \begin{array}{c} [c] \sim \\ \xrightarrow{r_2-2r_1} \\ \xrightarrow{r_3-4r_1} \end{array} \begin{bmatrix} [ccc|c]1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & -7 & 14 & 0 \\ 0 & -7 & 14 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} [c] \sim \\ \sim \\ \xrightarrow{r_3-r_2} \end{array} \begin{bmatrix} [ccc|c]1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & -7 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donde podemos observar que el sistema de ecuaciones tiene una infinidad de soluciones

$$\begin{aligned} &0x_3 = 0, \quad x_3 \text{ es libre, digamos } x_3 = k \\ &x_2 = 2x_3 = 2k, \\ &x_1 = 2+5x_3-2x_2 = 2+k. \end{aligned}$$

De manera que las soluciones tienen la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. **Responde lo siguiente.**

   (a) **Demuestra que $A + A^T$ es una matriz simétrica.**

   (b) **Decimos que A es anti-simétrica si $A^T = -A$. Demuestra que si A es cualquier matriz cuadrada, entonces $A - A^T$ es anti-simétrica.**

   (c) **Demuestra que cualquier matriz cuadrada puede ser descompuesta de manera única como la suma de una matriz simétrica y una matriz anti-simétrica.**

   Solución

   (a) Sa $B = A + A^T$, entonces $B^T = (A + A^T)^T = A^T + A = A + A^T = B$. Por lo tanto $B = A + A^T$ es simétrica.

   (b) Sea $C = A - A^T$, entonces $C^T = (A - A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T) = -C$. De manera que $C = A - A^T$ es anti-simétrica.

   (c) Sean $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$, $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$, y observe que $A = B + C$, lo que nos da una descomposición de A como la suma de una matriz simétrica y una matriz anti-simétrica. Ahora probemos la unicidad de la descomposición, para esto, suponga que $A = D + E$, donde D y E son simétrica y anti-simétrica, respectivamente. Observe que

   $$\begin{aligned} A + A^T &= (D + E) + (D + E)^T = (D + E) + (D - E) = 2D, \\ A - A^T &= (D + E) - (D + E)^T = (D + E) - (D - E) = 2E, \end{aligned}$$

   por lo que $D = \frac{1}{2}(A + A^T) = B$,$E = \frac{1}{2}(A - A^T) = C$.

4. **Encuentra una matriz inversa derecha de la matriz**

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Solución

   Buscamos una matriz $B_{3\times 2}$ tal que $AB = I_{2\times 2}$.

   $$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

   de donde obtenemos las ecuaciones

   $$\begin{aligned} x - z + u &= 1, \\ x + z + 2u &= 0, \\ y - w + v &= 0, \\ y + w + 2v &= 0. \end{aligned}$$

Mediante Eliminación Gaussiana obtenemosque

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \\ u & v \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-3\alpha & 1-3\beta \\ -1-\alpha & 1-\beta \\ 2\alpha & 2\beta \end{bmatrix},$$

donde $u = \alpha, v = \beta$ son variables libres.

5. **Demuestra que si A, B y $A+B$ son invertibles, entonces $A^{-1}+B^{-1}$ es invertible y de una fórmula para su inversa.**

   Solución
   Observa que
   $$A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(I + AB^{-1}) = A^{-1}(B + A)B^{-1},$$
   dado que A, B y $A + B$ son invertibles, entonces $A^{-1} + B^{-1}$ es invertible y
   $$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = (A^{-1}(B + A)B^{-1})^{-1} = B(A + B)^{-1}A.$$

6. **Considere la matriz**
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$
   Calcule su determinante de dos maneras:

   (a) **Expandiendo cualquier fila o columna.**

   (b) **Mediante Eliminación Gaussiana.**

   Solución

   (a) Veamos que
   $$\det(A) = (1)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + (-6)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1(-8) - 1(11) + (-6)(20) = -150.$$

   (b) Veamos que
   $$\begin{bmatrix} [ccc]1 & 2 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} [c]\sim \\ \xrightarrow{r_2-2r_1} \\ \xrightarrow{r_3+3r_1} \end{array} \begin{bmatrix} [ccc]1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 15 \\ 0 & 10 & -17 \end{bmatrix} \begin{array}{c} [c]\sim \\ \xrightarrow{r_3} \\ \xrightarrow{r_2} \end{array} \begin{bmatrix} [ccc]1 & 2 & -6 \\ 0 & 10 & -17 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}.$$

   Tomando en cuenta que se ralizó un cambio de fila, $\det(A) = (-1)^1(1)(10)(15) = -150$.

7. **Sea A una matriz cuadrada con entradas complejas. Demuestre que $\det(A^H A)$ es real, donde $A^H = \overline{A}^T$.**

Solución
Usando las propiedades de determinantes $\det(A) = \det(A^T)$ y $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$, obtenemos

$$\overline{\det(A^H A)} = \det\left(\overline{A^H A}\right) = \det\left(\left(\overline{A}^H \overline{A}\right)^T\right) = \det\left(\overline{A}^T \left(\overline{A}^H\right)^T\right) = \det\left(A^H A\right).$$

Por tanto, $\det\left(A^H A\right)$ es un número real.

8. **Sea S un subespacio de un espacio vectorial V.**

   (a) **Demuestra que si $\dim(S) = \dim(V) < \infty$, entonces $S = V$.**

   (b) **Da un contraejemplo del punto anterior cuando V no es de dimensión finita.**

   Solución

   (a) Cualquier base B de S puede ser extendida a una base B' de V tal que $B \subseteq B'$ (agregando vectores linealmente independientes). Por hipótesis, B y B' deben ser conjuntos finitos y $|B| = \dim(S) = \dim(V) = |B'|$. Por lo tanto, $B = B'$ y $S = \langle B \rangle = \langle B' \rangle = V$.

   (b) Si $V = \mathbb{R}[x]$ y $S = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] : f(0) = 0\}$, entonces $\dim(V) = \dim(S) = |\mathbb{N}|$ pero $V \neq S$.

9. **Sean V y W espacios vectoriales tales que $\dim(V) < \dim(W)$. Demuestra que no existe una transformación lineal sobreyectiva de V a W.**

   Solución
   Por reducción al absurdo, supongamos que $\tau : V \to W$ es una transformación lineal sobreyectiva. Por el Teorema de Rango + Nulidad, sabemos que $\dim(V) = \dim(\ker(\tau)) + \dim(\mathrm{Im}(\tau))$ y $\mathrm{Im}(\tau) = W$, lo que implica que $\dim(V) \geq \dim(W)$. Esto es una contradicción con la hipótesis. Por lo tanto, τ no puede ser sobreyectiva.

10. **Sea $\tau : V \to V$ un endomorfismo de V tal que $\mathbf{ker}(\tau) = \mathbf{ker}(\tau^2)$. Demuestra que $\mathbf{Im}(\tau) \cap \mathbf{ker}(\tau) = \{\mathbf{0}\}$.**

    Solución
    Sea $w \in \mathrm{Im}(\tau) \cap \ker(\tau)$. Como $w \in \mathrm{Im}(\tau)$, existe $v \in V$ tal que $\tau(v) = w$. Como $w \in \ker(\tau)$, entonces $\tau(w) = \mathbf{0}$. Sustituyendo, $\tau^2(v) = \mathbf{0}$, así que $v \in \ker(\tau^2) = \ker(\tau)$. Por lo tanto, $w = \tau(v) = \mathbf{0}$.

11. **Encuentra todos los valores y vectores propios de la siguiente matriz:**

    $$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

    Solución
    El polinomio característico es

    $$\det(xI - A) = (x-3)(x+6) + 8 = x^2 + 3x - 10 = (x-2)(x+5).$$

Las raíces del polinomio característico son 2 y -5, por lo que A tiene estos valores propios.

Los vectores propios correspondientes a 2 se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones homogéneo

$$(2I - A)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, el espacio de 2-vectores propios es $\langle 4, 1\rangle = \{(4\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Los vectores propios correspondientes a -5 se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones homogéneo

$$(-5I - A)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, el espacio de -5-vectores propios es $\langle 1, 2\rangle = \{(\lambda, 2\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

12. **Determina la dimensión de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$ y muestra que su intersección es trivial:**

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \quad \textbf{y} \quad W = \{(t, 2t, 3t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Solución
Vemos que todo elemento de U debe cumplir que $x_3 = -x_1 - x_2$, por lo que el conjunto $\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ lo genera. Al ser además linealmente independiente, concluimos que $\dim(U) = 2$.

Para W, vemos que el conjunto $\{(1, 2, 3)\}$ lo genera, por lo que $\dim(W) = 1$.

Sea $(x_1, x_2, x_3) \in U \cap W$. Este vector debe satisfacer que $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ y que $(x_1, x_2, x_3) = (t, 2t, 3t)$ para alguna $t \in \mathbb{R}$. Sustituyendo, vemos que $t + 2t + 3t = 0$, por lo que $t = 0$. Esto implica que $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$, como se queía demostrar.

13. **Sea $\tau : V \to V$ un endomorfismo de V tal que $\mathbf{Im}(\tau) \subseteq \mathbf{ker}(\tau - \mathbf{id})$, donde id es el endomorfismo identidad. Demuestra que $\tau \circ \tau = \tau$.**

Solución

Sea $v \in V$ un vector arbitrario. Vemos que $\tau(v) \in \mathrm{Im}(\tau) \subseteq \ker(\tau - \mathrm{id})$. La definición de kernel implica que

$$(\tau - \mathrm{id})(\tau(v)) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \tau(\tau(v)) - \tau(v) = \mathbf{0}.$$

Esto demuestra que $\tau(\tau(v)) = \tau(v)$, para todo $v \in V$, por lo que $\tau \circ \tau = \tau$.

14. **Encuentra todos los valores $\alpha \in \mathbb{R}$ que hagan que la siguiente matriz sea invertible:**

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha - 1 \\ 3 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Solución
La matriz A es invertible si y solo si $\det(A) \neq 0$. Observemos que

$$\det(A) = \alpha^2 - 3(\alpha - 1) = \alpha^2 - 3\alpha + 3.$$

Este polinomio en α no tiene raíces reales, por lo que la matriz A es invertible para toda $\alpha \in \mathbb{R}$.

3 Ejercicios de programación

La siguiente lista de reproducción de YouTube contiene ejercicios resueltos de programación:

https://youtube.com/playlist?list=PL66A4_etiRmx3-MSGmNaiypJOBFUUBf9R